Математичка гимназија

МАТУРСКИ РАД

из предмета Математика

Сферна тригонометрија

Ученик
Дејан Ковачевић, IVc

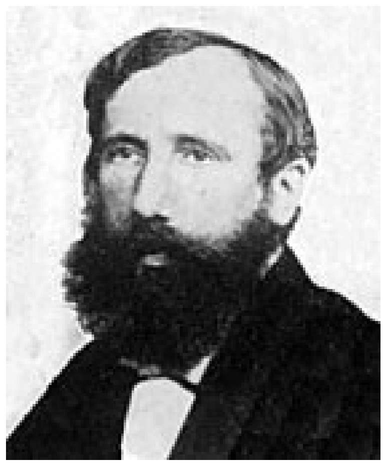
Ментор
др Ђорђе Баралић

Београд, јун 2019.

Увод

Сферна тригонометрија је део сферне геометрије која се бави односима између тригонометријских функција страница и углова сферних многоуглова (посебно сферних троуглова). Сферна тригонометрија има велику примену у астрономији, стереометрији, геодезији и навигацији. Почеци сферне тригонометрије се могу пронаћи у делима старогрчких математичара, а њен развој је даље настављен у раду средњовековних арапских математичара. Ипак, највећи развој је доживела у делима Непера, Деламбра и осталих нововековних математичара, која су великом већином садражана у књизи енглеског математичара Исака Тодхантера, која је углавном и коришћена приликом писања овог матурског рада.

Циљ овог рада је био да се напише један целовит приручник из сферне тригонометрије и да сви који воле математику и интересују се за класичну тригонометрију и астрономију сазнају више о овој лепој математичкој дисциплини.



Исак Тодхантер

Џон Непер

Жан Деламбр

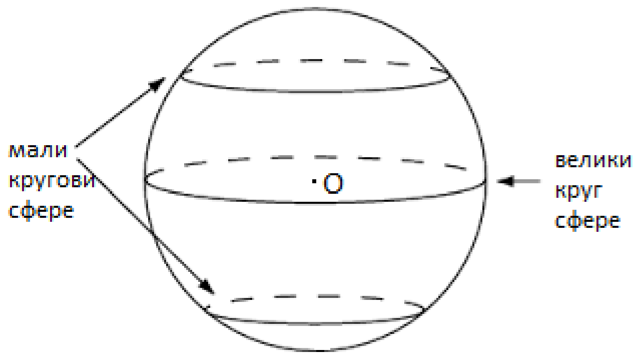
Садржај

1 Дефиниција и основне особине сфере

Дефиниција 1.1. ***Сфера*** *је површ која се састоји од свих тачака у простору које су једнако удаљене од дате тачке* O*. Тачка* O *је* ***центар*** *сфере, а одстојање било које тачке сфере од тачке* O *је* ***полупречник*** *сфере и обележава се са* R*, док се двоструко такво растојање назива* ***пречник*** *сфере.*

Особина 1. *Површина сфере полупречника* R *је* $\boxed{P = 4\pi R^2}$.

Дефиниција 1.2. *Пресек сфере и равни која садржи центар сфере је* ***велики круг сфере****. Ако раван не садржи центар сфере, тај пресек се назива* ***мали круг сфере*** *(слика 1.1).*

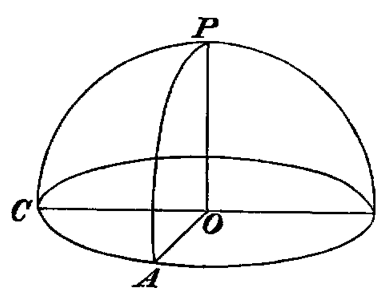


Слика 1.1

Дефиниција 1.3. ***Оса*** *било ког круга (или лука) сфере је пречник сфере који је нормалан на раван тог круга. Крајње тачке осе се називају* ***полови****.*

Лук великог круга сфере меримо углом који образују дужи чије су крајње тачке центар сфере и крајње тачке тог лука. Ако је p обим великог круга сфере, тада важи (слика 1.2):

$$AC = \frac{\measuredangle AOC}{2\pi} \cdot p = \frac{\measuredangle AOC}{2\pi} \cdot 2\pi R = \measuredangle AOC \cdot R \Rightarrow \boxed{\measuredangle AOC = \frac{AC}{R}}.$$



Слика 1.2

Теорема 1.1. *Ако се два лука великог круга сфере секу у тачки* P*, чије крајње тачке* A *и* C *нису дијаметрално супротне и који су једнаки* $\frac{\pi}{2}$*, онда је тачка* P *пол великог круга који садржи лукове* PA *и* PC *(слика 1.2).*

Доказ. Нека је O центар сфере и нека је k дати велики круг. Пошто су лукови PA и PC једнаки $\frac{\pi}{2}$, то значи да су углови $\measuredangle POA$ и $\measuredangle POA$ прави, па је дуж PO нормална на раван AOC, одакле следи да је тачка P пол великог круга k. ■

2 Сферни троуглови

2.1 Основна својства сферних троуглова

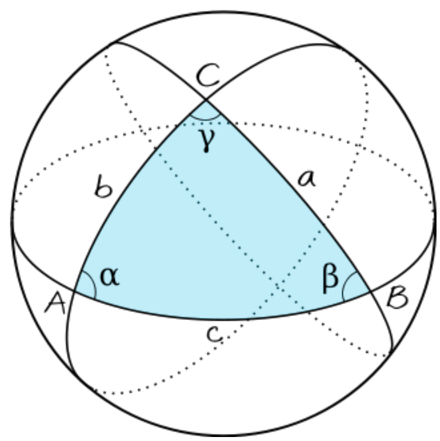
Сферни троугао можемо дефинисати на два еквивалентна начина:

Дефиниција 2.1. ***Сферни троугао*** *је део сфере ограничен луцима три велика круга.*

Дефиниција 2.2. ***Сферни троугао*** *представља пресек триедра и сфере са центром у врху триедра.*

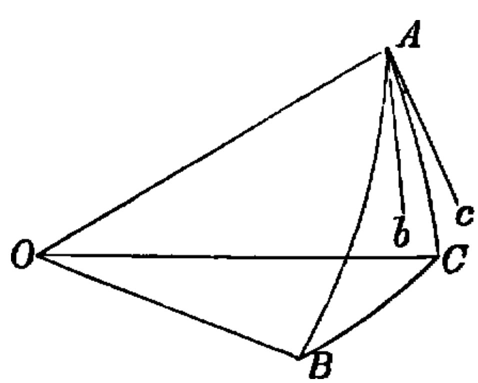
На сличан начин се дефинишу и **сферни многоуглови**; уместо броја три и триедра се тада појављују n и рогаљ.

У сферном троуглу ABC разликујемо **странице** a, b и c и **углове** α, β и γ (слика 2.1).



Слика 2.1

Странице сферног троугла су лукови великих кругова сфере, а њихову величину меримо централним углом, на пример $a = \measuredangle BOC$. Углови сферног троугла су једнаки угловима које образују одговарајуће тангенте на странице (слика 2.2); лако се види да су углови сферних троуглова једнаки угловима одговарајућих диедара триедра $OABC$. Према договору се посматрају само сферни троуглови чије су странице мање од полупречника сфере и углови мањи од π.



Слика 2.2

Кад се странице сферног троугла продуже, добијају се три велика круга сфере. Пресеком та три круга ће сфера бити подељена на 8 сферних троуглова.

Дефиниција 2.3. *Сферни троуглови су **суседни** уколико имају једну заједничку страницу. Сферни троуглови су **унакрсни** уколико имају једно заједничко теме. Сферни троуглови су **супротни** уколико немају ниједно заједничко теме.*

Сада ћемо дефинисати висину, тежишну дуж, бисектрису угла и симетралу странице сферног троугла:

Дефиниција 2.4. ***Висина** сферног троугла је лук великог круга сфере који се може повући из једног темена нормално на наспрамну страницу сферног троугла. **Тежишна дуж** сферног троугла је лук великог круга сфере који повезује једно теме и средиште наспрамне странице сферног троугла. **Бисектриса угла** сферног троугла је лук великог круга сфере који полови угао сферног троугла. **Симетрала странице** сферног троугла је велики круг сфере који пролази који пролази кроз средиште те странице и нормалан је на њу.*

Значајне тачке сферног троугла (тежиште, ортоцентар, центар описаног и уписаног круга) се дефинишу на исти начин као код троуглова у равни.

За сферне троуглове важе ставови подударности: ,,три странице", ,,две странице и угао између њих", ,,страница и налегли углови", а специјално за њих важи и став ,,три угла", који ће бити доказан касније.

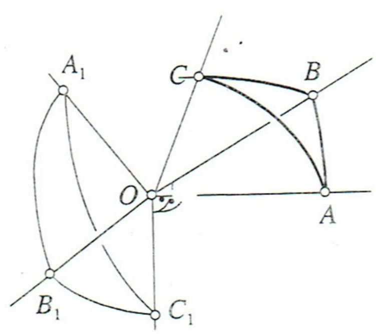
Приметимо да из друге дефиниције сферног троугла следи да сваком тврђењу о сферном троуглу одговара тврђење о триедру: страници и углу сферног троугла одговарају редом ивични угао и диедар триедра. Према томе, за сферне троуглове важи следеће:

Теорема 2.1. 1° *Свака страница сферног троугла је мања од збира друге две странице, а већа од њихове разлике,*
2° *Већој страници сферног троугла одговара већи угао и обрнуто; једнаким страницама одговарају једнаки углови и обрнуто,*
3° *Збир свих страница сферног троугла је мањи од 2π,*
4° *Збир свих углова сферног троугла је већи од π а мањи од 3π.*

Тачке 3° и 4° претходне теореме ће бити доказане касније.

2.2 Поларни сферни троуглови

Дефиниција 2.5. *Нека је дат сферни троугао ABC. Њему **поларан** сферни троугао $A_1B_1C_1$ се одређује на следећи начин: A_1 је јединствена тачка на сфери са исте стране равни OBC као и A, за коју важи $OA_1 \perp OBC$; аналогно се дефинишу и B_1 и C_1 (слика 2.3).*



Слика 2.3

За поларне сферне троуглове важе следеће две теореме:

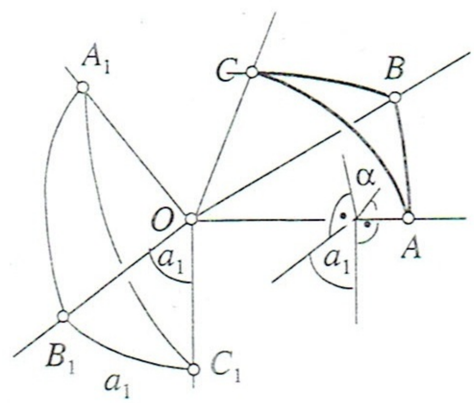
Теорема 2.2. *Ако је сферни троугао $A_1B_1C_1$ поларан сферном троуглу ABC , тада је и сферни троугао ABC поларан сферном троуглу $A_1B_1C_1$. Другим речима, поларност је симетрична релација.*

Доказ. Из $OB_1 \perp \pi(OAC)$ добијамо да је $OB_1 \perp OA$ (1). Из $OC_1 \perp \pi(OAB)$ добијамо да је $OC_1 \perp OA$ (2). Из (1) и (2) следи $OA \perp \pi(OB_1C_1)$. На сличан начин се доказује и $OB \perp \pi(OA_1C_1)$ и $OC \perp \pi(OA_1B_1)$, па је на основу дефиниције сферни троугао ABC поларан сферном троуглу $A_1B_1C_1$. ■

Теорема 2.3. *За странице и углове поларних троуглова важи:*

$$\boxed{\begin{array}{l} a_1+\alpha=b_1+\beta=c_1+\gamma=\pi \\ a+\alpha_1=b+\beta_1=c+\gamma_1=\pi \end{array}}$$

Доказ. Страница a_1 је угао који образују нормале на равни OAB и OAC, а угао α је угао између тих равни (слика 2.4). То значи да су то суплементни углови. Аналогно се показује и за остале једнакости, чиме је доказана теорема. ■



Слика 2.4

Став 2.1. *Збир два угла сферног троугла мањи од трећег угла увећаног за π: $\alpha+\beta<\gamma+\pi$.*

Решење. Нека је ABC сферни троугао и нека је $A_1B_1C_1$ њему поларан троугао. Користећи теорему 2.3. имамо:

$$\alpha+\beta<\gamma+\pi,$$

$$\pi-a_1+\pi-b_1<\pi-c_1+\pi,$$

$$a_1+b_1>c_1,$$

што је тачно на основу тачке 1° теореме 2.1. ■

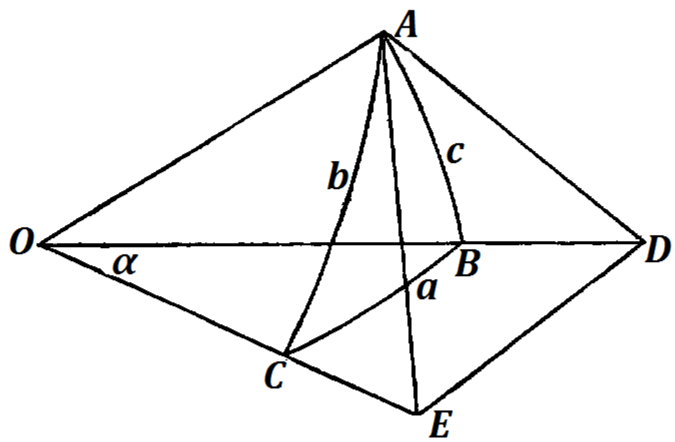
3 Релације између тригонометријских функција углова и страница сферних троуглова

За сферне троуглове важе косинусна и синусна теорема, али у нешто измењеном облику.

Теорема 3.1. *(Косинусна теорема за странице)*

$$\boxed{\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha}$$

Доказ. Нека је ABC сферни троугао и нека је O центар сфере. Нека тангента на лук AB у тачки A сече полуправу OB у тачки D и нека тангента на лук AC у тачки A сече полуправу OC у тачки E (слика 3.1). Угао $\measuredangle DOE$ представља угао α сферног троугла ABC.



Слика 3.1

Применом косинусне теореме на $\triangle ODE$ и $\triangle ADE$ добијамо

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2AD \cdot AE \cos \alpha$$

$$DE^2 = OD^2 + OE^2 - 2OD \cdot OE \cos a.$$

Троуглови OAD и OAE су правоугли, па важи $OD^2 = OA^2 + AD^2$ и $OE^2 = OA^2 + AE^2$. Комбинацијом претходних једначина добијамо

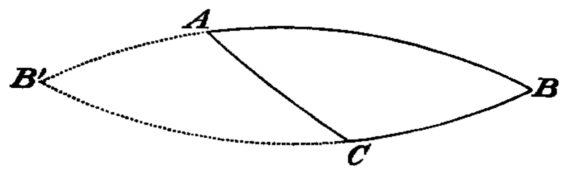
$$2OA^2 + 2AD \cdot AE \cos \alpha - 2OD \cdot OE \cos a.$$

Одавде је

$$\cos a = \frac{OA}{OE} \cdot \frac{OA}{OD} + \frac{AE}{OE} \cdot \frac{AD}{OD} \cos \alpha$$
$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha,$$

што представља тврђење теореме. ■

У доказу претходне теореме претпостављено је да су странице које граде угао α мање од $\frac{\pi}{2}$, јер у том случају тангенте на тачку A секу полуправе OB и OC. Сада је потребно показати да добијена формула важи и у осталим случајевима:
1° Нека је једна страница која чини угао α већа од $\frac{\pi}{2}$, нпр. AB. Нека се странице AC и BC секу у тачки B' (слика 3.2) и нека је $AB' = c'$, $CB' = a'$.



Слика 3.2

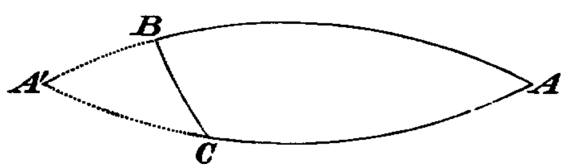
На основу доказане теореме важи:

$$\cos a' = \cos b \cos c' + \sin b \sin c' \cos \sphericalangle B'CA.$$

Међутим, важи $a' = \pi - a, c' = \pi - c, \measuredangle B'AC = \pi - \alpha$, па је због тога

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

2° Нека су обе странице које чине угао α веће од $\dfrac{\pi}{2}$. Нека се странице AB и AC секу у тачки A' и нека је $A'B = c'$, $A'C = b'$ (слика 3.3).



Слика 3.3

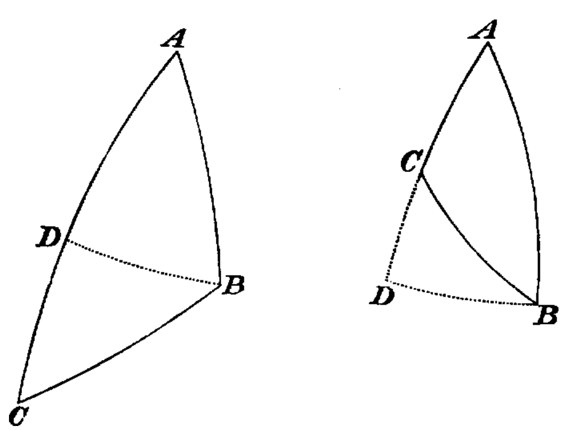
Слично као (1):

$$\cos a = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos \alpha',$$

$$b' = \pi - b, c' = \pi - c, \alpha' = \alpha,$$

$$\Rightarrow \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

3° Нека је једна страница која чини угао α једнака $\dfrac{\pi}{2}$, нпр. AB. Нека је BD висина сферног троугла ABC (слика 3.4).



Слика 3.4

Ако је $BD = \frac{\pi}{2}$, тачка B је пол лука AC. Тада је $a = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$, као и $c = \frac{\pi}{2}$. Када се ово убаци у доказану формулу добија се $0 = 0$. Ако није $BD = \frac{\pi}{2}$, за сферни троугао BDC важи

$$\cos a = \cos CD \cos BD + \sin CD \sin BD \cos \sphericalangle CDB,$$

$\cos \sphericalangle CDB = 0$, $\cos CD = \cos\left(\frac{\pi}{2} - b\right) = \sin b$, $\cos BD = \cos \alpha$(добијено из косинусне теореме за сферни троугао ADB). Из претходних једначина се добија $\cos a = \sin b \sin \alpha$, што одговара косинусној теореми за сферни троугао ABC када је $c = \frac{\pi}{2}$.

4° Нека су обе странице које чине угао α једнаке $\frac{\pi}{2}$. Доказана формула у овом случају постаје $\cos a = \cos \alpha$, а ово је очигледно тачно, јер је тачка A пол лука BC, па је $A = a$.

Када је $\alpha = \frac{\pi}{2}$, косинусна теорема за странице постаје $\cos a = \cos b \cos c$. Ова формула представља *Питагорину*[1] *теорему за сферни троугао.* Она је уопштење за теорему у случају троуглова у равни (што важи за све формуле у сферној тригонометрији, али ће то бити показано само на овој формули). Када $R \to \infty$, количници $\frac{\widehat{a}}{R}, \frac{\widehat{b}}{R}, \frac{\widehat{c}}{R}$ теже нули, а они, према оном што је показано у другој глави, представљају странице сферног троугла ABC. Косинус чији аргумент тежи нули се може представити Маклореновим полиномом:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), x \to 0.$$

Користећи ово и Питагорину теорему за сферни троугао добијамо:

$$\cos\left(\frac{\widehat{a}}{R}\right) = \cos\left(\frac{\widehat{b}}{R}\right)\cos\left(\frac{\widehat{c}}{R}\right),$$

$$1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{a}}{R}\right)^2 + o\left(\frac{1}{R^2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{b}}{R}\right)^2 + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right)\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{c}}{R}\right)^2 + o\left(\frac{1}{R^2}\right)\right), R \to \infty.$$

Након сређивања добијамо:

$$\left(\frac{\widehat{a}}{R}\right)^2 = \left(\frac{\widehat{b}}{R}\right)^2 + \left(\frac{\widehat{c}}{R}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{b}\widehat{c}}{R^2}\right)^2 + o\left(\frac{1}{R^2}\right) \Big/ \cdot R^2$$

$$(\widehat{a})^2 = \left(\widehat{b}\right)^2 + (\widehat{c})^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{b}\widehat{c}}{R}\right)^2 + o(1).$$

Пошто $R \to \infty$, можемо скратити члан $\frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{b}\widehat{c}}{R}\right)^2$, па нам остаје:

$$(\widehat{a})^2 = \left(\widehat{b}\right)^2 + (\widehat{c})^2 + o(1),$$

што представља Питагорину теорему за правоугли троугао са хипотенузом $\widehat{a}$.

[1] Питагора ($\Pi\upsilon\theta\alpha\gamma\rho o\alpha\zeta$, око 570 - 495 пне.), старогрчки математичар и филозоф

Теорема 3.2. *(Косинусна теорема за углове)*

$$\boxed{\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a}$$

Доказ. Ако применимо косинусну теорему за странице на сферни троугао поларан датом сферном троуглу добијамо:

$$\cos a' = \cos b'\cos c' + \sin b'\sin c'\cos\alpha',$$

$$\cos(\pi-\alpha) = \cos(\pi-\beta)\cos(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\beta)\sin(\pi-\gamma)\cos(\pi-a),$$
$$-\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma'\cos a,$$
$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a.$$

■

Последица. *Два сферна троугла су подударна ако су им подударни одговарајући углови.*

Теорема 3.3. *(Синусна теорема)*

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{\sin a} = \frac{\sin\beta}{\sin b} = \frac{\sin\gamma}{\sin c}}$$

Доказ. Из косинусне теореме за странице добијамо

$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

Користећи овај израз добијамо:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\sin^2 a} = \frac{1}{\sin^2 a}\cdot\frac{\sin^2 b\sin^2 c - (\cos a - \cos b\cos c)^2}{\sin^2 b\sin^2 c} =$$
$$\frac{(1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c) - \cos^2 a + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c} =$$
$$\frac{1-\cos^2 b - \cos^2 b + \cos^2 b\cos^2 c - \cos^2 a + 2\cos a\cos b\cos c - \cos^2 b\cos^2 c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c} =$$
$$\frac{1-\cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.$$

Пошто се добијени израз не мења ако a, b и c замењују места, закључујемо да се исти израз добија и ако пођемо од $\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2 b}$, односно $\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2 c}$, чиме је показана синусна теорема. ■

Сада ћемо показати неколико формула које ће нам користити у наредним главама при доказивању теорема и израчунавању неких других елемената сферних троуглова, али и неких геометријских тела.

Став 3.1. *За сферни троугао са страницама a, b и c и угловима α, β и γ важе формуле:*
а) (формуле половине угла)

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}},\qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}},$$

где је $s=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.
б) (формуле половине странице)

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}},\qquad \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}},$$

где је $\sigma=\dfrac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)$.

Решење. Биће доказана само формула за $\sin\dfrac{\alpha}{2}$ (остале формуле се слично изводе):

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\Rightarrow\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}}{2},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin b\sin c-\cos a+\cos b\cos c}{2\sin b\sin c},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos(c-b)-\cos a}{2\sin b\sin c},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\cos(s-b-s+c)-\cos(2s-b-c)}{2\sin b\sin c},$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$$

(узимајући у обзир да је $\sin\dfrac{\alpha}{2}>0$). ∎

Комбинацијом формула из претходног примера могу се добити изрази за tg и ctg половине угла и странице:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}},\qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}\quad\text{и}\quad \operatorname{ctg}\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}{\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}}.$$

Став 3.2. *За сферни троугао са страницама* a, b *и* c *и угловима* α, β *и* γ *важе формуле:*
а) (Неперове[2] *аналогије)*

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},\qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2},$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}\quad \text{и}\quad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

б) (Деламброве[3] *аналогије)*

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}&=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\\
\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}&=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2},\\
\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}&=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\quad \text{и}\\
\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}&=\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.
\end{aligned}$$

Доказ. а)

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}+\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-b)}}}{1-\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}}=$$

$$\frac{\sqrt{\frac{\sin(s-c)}{\sin s}}\cdot\frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sqrt{\sin(s-a)-sin(s-b)}}}{1-\frac{\sin(s-c)}{\sin c}}=$$

$$\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin c}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}\cdot\frac{\sin(s-b)+\sin(s-a)}{\sin s-\sin(s-c)}=$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{2\sin\frac{2s-a-b}{2}\cos\frac{s-a-s+b}{2}}{2\sin\frac{s-s+c}{2}\cos\frac{s+s-c}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}.$$

Остале формуле се слично изводе.

[2]John Napier (1550 - 1617), шкотски математичар, физичар, астроном и осми лорд од Мерчистона
[3]Jean Baptiste Joseph Delambre (1749 - 1822), француски математичар и астроном

б)

$$1+\cos c = 1+\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma =$$

$$\sin^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos a\cos b\Big(\sin^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{\gamma}{2}\Big)+\sin a\sin b\Big(\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}\Big)=$$

$$(1+\cos a\cos b+\sin a\sin b)\cos^2\frac{\gamma}{2}+(1+\cos a\cos b-\sin a\sin b)\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$1+\cos c=(1+\cos(a-b))\cos^2\frac{\gamma}{2}+(1+\cos(a+b))\sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$\cos^2\frac{c}{2}=\cos^2\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}+\cos^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}/:\cos^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{\cos^2\frac{c}{2}}{\cos^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{\cos^2\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}+1. \tag{1}$$

Слично, полазећи од $1-\cos a$ добијамо :

$$\frac{\sin^2\frac{c}{2}}{\sin^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin^2\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}+1. \tag{2}$$

Квадрирањем и сређивањем прве две Неперове аналогије добијамо следеће две једначине:

$$\frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{\cos^2\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}, \tag{3}$$

$$\frac{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{\sin^2\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}. \tag{4}$$

Убацивањем једначине (1) у једначину (3), односно (2) у (4) добијамо:

$$\frac{\cos^2\frac{c}{2}}{\cos^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}}+1=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

$$\frac{\sin^2\frac{c}{2}}{\sin^2\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}}=\frac{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}+1=\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}}.$$

Кореновањем и сређивањем ових једначина добијамо прве две аналогије (из Неперових аналогија следи да су $a+b$ и $\alpha+\beta$ истог знака, одакле следи да су косинуси са тим аргументима истог знака, па зато смемо да коренујемо прву једначину). Остале две аналогије се добијају множењем прве две Неперове аналогије респективно са добијеним аналогијама. ■

Деламброве аналогије су познате и под називом *Гаусове*[4] *формуле.*

[4] Johann Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), немачки математичар и физичар

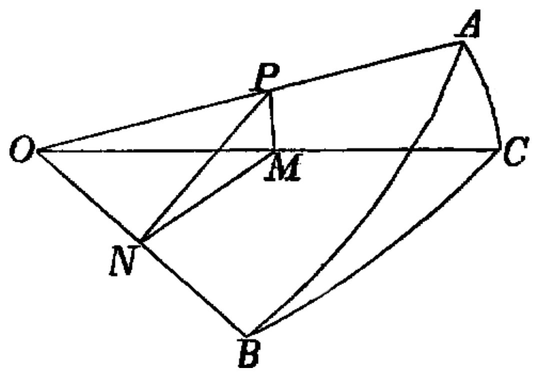
4 Решавање сферних троуглова

У сваком сферном троуглу постоји шест елемената, три странице и три угла, поред полупречника сфере, који је подразумевано увек константан. Под **решавањем сферних троуглова** се подразумева процес налажења свих елемената сферног троугла, при коме је познато мање од шест његових елемената. У наставку ћемо видети да када су нам позната три елемента, можемо решити сферни троугао. Почећемо од правоуглих сферних троуглова.

4.1 Решавање правоуглих сферних троуглова

Сферни троугао може имати један, два или три права угла. Ако су сва три угла права, онда су све три стране једнаке $\frac{\pi}{2}$ (следи из косинусне теореме за странице). Ако су два угла права, онда су њихове наспрамне стране једнаке $\frac{\pi}{2}$, а трећа страна има исто степени колико и трећи угао (што поново следи из косинусне теореме за странице). Према томе, посматраћемо сферне троуглове са само једним правим углом.

Нека је ABC правоугли троугао са правим углом код темена C; нека је O центар сфере и нека је c хипотенуза. Нека је P било која тачка дужи OA и M тачка дужи O таква да је $PM \perp OC$, а N тачка дужи OB таква да је $MN \perp OB$(слика 4.1).



Слика 4.1

PM је нормално на MN, јер је раван AOC нормална на раван BOC, па имамо да је

$$PN^2 = PM^2 + MN^2 = OP^2 - OM^2 + OM^2 - ON^2 = OP^2 - ON^2,$$

па је троугао PNO правоугли. Даље имамо:

$$\frac{ON}{OP} = \frac{ON}{OM} \cdot \frac{OM}{OP} \Rightarrow \cos c = \cos a \cos b, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{PM}{OP} = \frac{PM}{PN} \cdot \frac{PN}{OP} &\Rightarrow \sin b = \sin\beta \sin c \\ \text{Слично,} \qquad & \sin a = \sin\alpha \sin c \end{aligned}\right\}, \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{MN}{ON} = \frac{MN}{PN} \cdot \frac{PN}{ON} &\Rightarrow \operatorname{tg} a = \cos\beta \operatorname{tg} c \\ \text{Слично,} \qquad & \operatorname{tg} b = \cos\alpha \operatorname{tg} c \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{PM}{OM} = \frac{PM}{MN} \cdot \frac{MN}{OM} &\Rightarrow \operatorname{tg} b = \operatorname{tg}\beta \sin a \\ \text{Слично,} \qquad & \operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\alpha \sin b \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Множећи формуле из (4), уз коришћење једначине (1) добијамо:

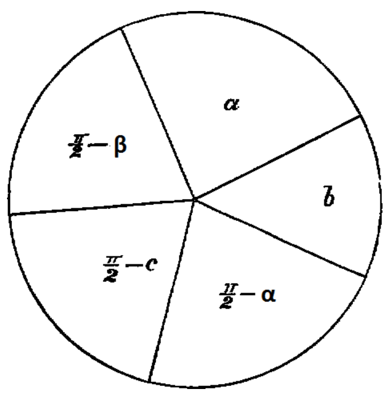
$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}{\sin a\sin b}=\frac{1}{\cos a\cos b}=\frac{1}{\cos c}\Rightarrow\cos c=\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \tag{5}$$

Множећи унакрсно другу једначину из (2) и прву једначину из (3) уз коришћење једначине (1) добијамо:

$$\left.\begin{array}{c}\sin a\cos\beta\operatorname{tg}c=\operatorname{tg}a\sin\alpha\sin c\\ \Rightarrow\cos\beta=\dfrac{\sin\alpha\cos c}{\cos a}\Rightarrow\cos\beta=\sin\alpha\cos b\\ \text{Слично,}\qquad\qquad\cos\alpha=\sin\beta\cos a\end{array}\right\}. \tag{6}$$

Ових шест формула садржи десет једначина, од којих свака представља различиту комбинацију тригонометријских функција чији су аргументи нека три од пет елемената (a,b,c,α,β). Из комбинаторике је познато да од неких пет задатих различитих вредности можемо изабрати три вредности на десет начина. Према томе, ако су нам позната било која два од поменутух пет елемената сферног троугла и потребан нам је трећи елемент, увек ћемо моћи да га нађемо из неке од претходних десет једначина. Постоји врло једноставан начин за памћење ових једначина, за шта се користи *Неперово правило*.

Изузимајући прав угао, две странице које чине тај угао, комплемент хипотенузе и углови комплементарни осталим угловима сферног троугла $\left(a,b,\frac{\pi}{2}-c,\frac{\pi}{2}-\alpha,\frac{\pi}{2}-\beta\right)$ треба да се поређају у круг, поштујући њихов редослед у сферном троуглу (слика 4.2).



Слика 4.2

Било који од тих пет елемената на кругу се може изабрати и он онда добија назив *средњи елемент*. Елементи који се налазе поред њега су *суседни елементи*, а преостала два елемента су *супротни елементи*. Тада Неперово правило гласи:

синус средњег елемента = производу тангенса суседних елемената,
синус средњег елемента = производу косинуса супротних елемената.

Као пример употребе Неперовог правила извешћемо формуле када је средњи елемент a:

$$\sin a=\operatorname{tg}b\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\Rightarrow\sin a=\operatorname{tg}b\operatorname{ctg}\beta\Rightarrow(4)$$

$$\sin a=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-c\right)\Rightarrow\sin a=\sin\alpha\sin c\Rightarrow(2).$$

За елементе правоуглих сферних троуглова важе одређена ограничења. Из једначине (1) следи да је $\cos c$ истог знака као и $\cos a \cos b$, па су или сва три косинуса позитивна или сва три косинуса негативна. То значи да су или све три странице ових троуглова мање од $\frac{\pi}{2}$ или су све три странице веће од $\frac{\pi}{2}$. Из друге једначине код (4) следи да је $\operatorname{tg} a$ истог знака као и $\operatorname{tg} \alpha$. Одатле важи $a < \frac{\pi}{2}$ и $\alpha < \frac{\pi}{2}$ или $a > \frac{\pi}{2}$ и $a > \frac{\pi}{2}$, а слично важи и за b и β.

Следи неколико примера решавања сферног троугла.

Пример 4.1. *Наћи елементе правоуглог сферног троугла када су познате катете a и b.*

Решење. За израчунавање хипотенузе и углова се користе следеће једначине:

$$\cos c = \cos a \cos b, \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin b}, \qquad \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\sin a}.$$

Овде су сви елементи једнозначно одређени. ▲

Пример 4.2. *Наћи елементе правоуглог сферног троугла када су познате хипотенуза c и једна катета a.*

Решење. Непознати елементи се добијају из следећих једначина:

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos a}, \qquad \sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \qquad \cos \beta = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}.$$

У овом примеру је угао α има само једно решење (због раније наведених ограничења), као и остали елементи. ▲

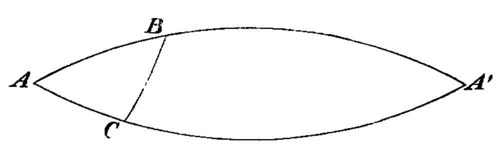
Пример 4.3. *Наћи елементе правоуглог сферног троугла када су познати једна катета b и угао наспрам ње β.*

Решење. Овде ћемо користити следеће једначине:

$$\sin c = \sin b \sin \beta, \qquad \sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} b}{\sin \beta}, \qquad \sin \alpha = \frac{\cos \beta}{\cos b}.$$

1° Ако је $b = \beta$, онда је $c = \frac{\pi}{2}$, $a = \frac{\pi}{2}$ и $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Дакле, добија се троугао са два права угла.

2° Ако b и β нису једнаки, онда ови углови морају у исто време бити већи од $\frac{\pi}{2}$ или мањи $\frac{\pi}{2}$. Ако важи прво, онда мора бити $b > \beta$, а ако важи друго, мора бити $b < \beta$. Пошто се за c, a и α добијају две вредности, овај задатак има два решења. Она су приказана на слици 4.3. Дакле, то су суседни сферни троуглови.



Слика 4.3

▲

Када је у неком сферном троуглу једна страница једнака $\frac{\pi}{2}$, он је поларан неком правоуглом сферном троуглу, па се његово решавање своди на решавање тог правоуглог троугла.

Једнакостранични сферни троугао се једном висином своди на правоугли сферни троугао, док се једнакокраки сферни троугао своди на правоугли сферни троугао повлачењем висине која одговара основици. То значи да нам је још остало да размотримо решавање косоуглих сфених троуглова.

4.2 Решавање косоуглих сферних троуглова

Из правила о подударности тространих рогљева произилази да је тространи рогаљ, па према томе и сферни троугао, одређен са три елемента. За решавање имамо ове случајеве:
1° Дате су две странице и угао наспрам једне од њих;
2° Дата су два угла и страница наспрам једног од њих;
3° Дате су две странице са захваћеним углом;
4° Дата је страница са два налегла угла;
5° Дате су све три странице;
6° Дата су сва три угла.

Биће приказано решавање неких случајева (остали се раде на сличан начин).

Случај 5° *Дате су све три странице.*

Решење. Овде имамо да је $\cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c}$, а сличне формуле важе и за $\cos\beta$ и $\cos\gamma$, чиме смо одредили све непознате елементе. ▲

Случај 3° *Дате су две странице са захваћеним углом (a, γ, b).*

Решење. Из Неперових аналогија

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\dfrac{a-b}{2}}{\sin\dfrac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

можемо добити вредности за $\alpha+\beta$ и $\alpha-\beta$, одакле можемо добити α и β. Страницу c можемо добити из Деламброве аналогије $\cos\dfrac{c}{2} = \dfrac{\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$. ▲

Случај 5° *Дате су две странице и угао наспрам једне од њих (a, b, α).*

Решење. Угао β налази се из синусне теореме: $\sin\beta = \dfrac{\sin\alpha\sin b}{\sin a}$. Вредност за $\sin\beta$ мора бити позитивна и мања од 1, или једнака 1. Ако је $\sin\beta = 1$, онда је $\beta = 90°$. ако је $\sin\beta < 1$, онда се добијају две вредности за β. Да ли обе вредности могу бити решење датог проблема, проверава се на следећи начин: ако је $a \gtrless b$, онда мора бити и $\alpha \gtrless \beta$; ако је $a + b \gtreqqless \pi$, онда мора бити и $\alpha + \beta \gtreqqless 180°$ (ово тврђење се може доказати посматрањем два суседна сферна троугла и применом тачке 2° теореме 2.1). Дакле, задатак може имати два решења или једно решење. Страница c и угао γ се могу наћи из Неперових аналогија

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\dfrac{a-b}{2}}{\cos\dfrac{a+b}{2}}\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}}\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}.$$

▲

5 Значајне тачке сферног троугла

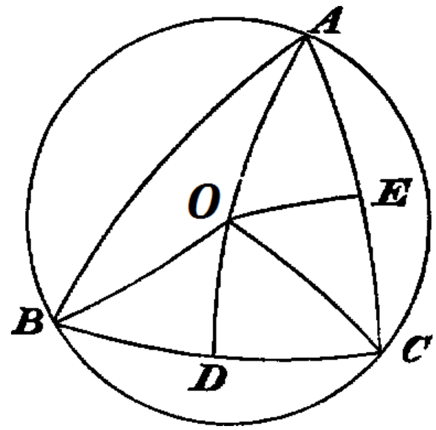
5.1 Описани и уписани круг

Описани и уписани круг сферног троугла представљају мале кругове сфере који садрже темена тог троугла, односно додирују његове странице. Ако бисмо желели да дефинишемо центре тих кругова на сличан начин као за случај троуглова у равни, уместо центара тих кругова бисмо користили њихове полове и они би нам служили за мерење полупречника тих кругова. Такође бисмо на тај начин могли да изразимо те полупречнике преко елемената сферног троугла. За полове важи следећа теорема:

Теорема 5.1. *Пол круга сфере је једнако удаљен од свих његових тачака.*

Доказ. Нека је дат круг на сфери са центром C и нека је D произвољна тачка на њему. Нека је P пол тог круга. Тада је $\measuredangle PCD = 90°$, па важи Питагорина теорема: $PD^2 = PC^2 + CD^2$. Пошто је CD константно као полупречник тог круга, онда је и PD константно, па је због тога и лук PD увек исте дужине, чиме је доказана теорема. ∎

Да бисмо одредили полупречник описаног круга сферног троугла, прво морамо да покажемо да се његов пол налази у пресеку симетрала страница. Нека је дат сферни троугао ABC и нека се симетрале страница AC и BC секу у тачки O (слика 5.1).



Слика 5.1

Нека су D и E пресечне тачке тих симетрала са одговарајућим страницама. Имамо да важи $AE = CE = \dfrac{a}{2}$, $\sphericalangle AEO = \sphericalangle CEO = \dfrac{\pi}{2}$ и $OD = OD$, па на основу става подударности ,,СУС“ важи $\triangle AOE \cong \triangle COE$. Аналогно важи и $\triangle BOD \cong \triangle COD$. Одавде имамо да је $OA = OB = OC$, па је на основу претходне теореме тачка O пол круга који садржи тачке A, B и C. Сада треба да покажемо да и симетрала треће странице овог троугла пролази кроз тачку O. Нека је OF висина сферног троугла ABO. Тада је $\sphericalangle OFA = \dfrac{\pi}{2}$, па важи Питагорина теорема за сферни троугао: $\cos AO = \cos OF \cos FA \Rightarrow \cos FA = \dfrac{\cos AO}{\cos OF}$. Слично је $\cos FB = \dfrac{\cos BO}{\cos OF}$. Пошто важи $OA = OB$, следи да је $FA = FB$, што значи да OF представља симетралу странице AB. Сада можемо да израчунамо $\sphericalangle OCB$. Нека је $\sigma = \dfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma)$. Из добијених подударности имамо $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OBA$, $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA$ и $\sphericalangle OCB = \sphericalangle OBC$, па је $2(\sphericalangle OCB + \sphericalangle OAB + \sphericalangle OAC) = \alpha + \beta + \gamma \Rightarrow \sphericalangle OCB + \alpha = \sigma \Rightarrow \sphericalangle OCB = \sigma - \alpha$.

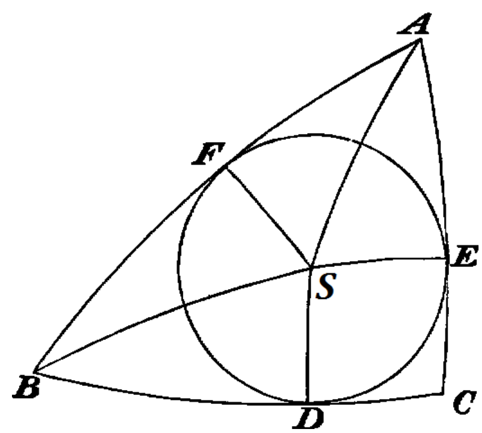
Нека је $OC = R$. Користећи једну од формула из претходне главе добијамо:

$$\operatorname{tg} CD = \operatorname{tg} CO \cos\sphericalangle OCD \Rightarrow \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg} R\cos(\sigma-\alpha) \Rightarrow \operatorname{tg} R = \frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\cos(\sigma-\alpha)}.$$

Убацујући формулу за тангенс половине странице у ову једначину добијамо израз за $\operatorname{tg} R$:

$$\boxed{\operatorname{tg} R = \sqrt{\frac{-\cos\sigma}{\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}}.$$

Покажимо сада да се бисектрисе углова сферног троугла секу у полу круга уписаног у тај сферни троугао, након чега ћемо одредити његов полупречник. Нека је дат сферни троугао ABC и нека се бисектрисе углова $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$ секу у тачки S (слика 5.2).



Слика 5.2

Нека су D, E и F подножја нормала из S на BC, AC и AB респективно. Пошто је $\sphericalangle FAS = \sphericalangle EAS = \frac{\alpha}{2}$ и $\sphericalangle SFA = \sphericalangle SEA = \frac{\pi}{2}$, применом синусне теореме на троуглове ASF и ASE добијамо $\sin SF = \frac{\sin AS \sin\sphericalangle FAS}{\sin\sphericalangle SFA} = \frac{\sin AS\sin\sphericalangle EAS}{\sin\sphericalangle SEA} = \sin SE \Rightarrow SF = SE$. Слично се показује и $SE = SD$, па је на основу теореме 5.1 тачка S пол круга који додирује сферни троугао ABC у тачкама D, E и F. Докажимо да и бисектриса угла $\sphericalangle ACB$ пролази кроз тачку S. Поново примењујући синусну теорему добијамо $\sin\sphericalangle SCD = \frac{\sin\sphericalangle SDC\sin SC}{\sin SD} = \frac{\sin\sphericalangle SEC\sin SC}{\sin SE} = \sin\sphericalangle SED$, па SC јесте бисектриса угла $\sphericalangle ACB$.

Израчунајмо сада полупречник уписаног круга. Нека је $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$. Применом Питагорине теореме добијамо $AF = AE$, $BD = BF$ и $CD = CE$. Одавде имамо да је $AF + BD + CD = s \Rightarrow AF + a = s \Rightarrow AF = s - a$. Нека је $SA = r$. Користећи формулу из претходног одељка добијамо:

$$\operatorname{tg} SF = \sin AF \operatorname{tg}\sphericalangle SAF \Rightarrow \operatorname{tg} r = \sin(s-a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Убацујући формулу за тангенс половине угла у ову једначину добијамо израз за $\operatorname{tg} r$:

$$\boxed{\operatorname{tg} r = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}}}.$$

5.2 Ортоцентар и тежиште

Да бисмо показали да се висине сферног троугла секу у једној тачки (ортоцентру), прво ћемо показати следећу лему:

Лема 5.1. *Нека су дати лукови OA, OB и OC. Ако се из било које тачке P на луку OB повуку лукови PM и PN нормални на OA и OC респективно, тада је количник $\dfrac{\sin PM}{\sin PN}$ константан и независтан од избора тачке P.*

Доказ. Користећи једначину (2) из претходне главе добијамо

$$\sin PM = \sin OP \sin \sphericalangle AOB \qquad \text{и} \qquad \sin PN = \sin OP \sin \sphericalangle COB.$$

Дељењем ове две једначине имамо да је $\dfrac{\sin PM}{\sin PN} = \dfrac{\sin \sphericalangle AOB}{\sin \sphericalangle COB} = const$. Пошто десна страна једнакости не зависи од P, лема је доказана. ■

Покажимо сада тврђење за ортоцентар. Нека је дат сферни троугао ABC и нека је CF висина тог троугла. Нека су ξ и η нормале из тачке F на странице BC и AC респективно. На основу претходно доказане леме је $\dfrac{\sin \xi}{\sin \eta} = \dfrac{\sin \sphericalangle FCB}{\sin \sphericalangle FCA}$. Користећи једначину (6) из претходне главе добијамо

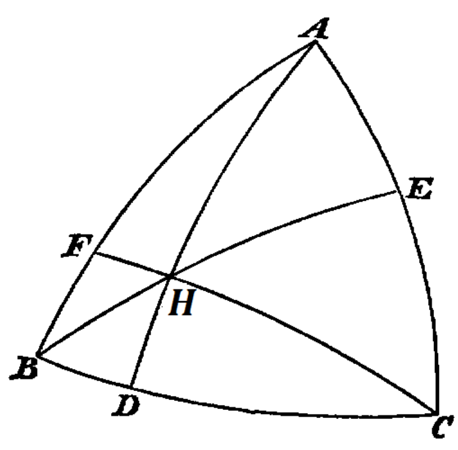
$$\cos \beta = \cos CF \cos \sphericalangle FCB \qquad \text{и} \qquad \cos \alpha = \cos CF \cos \sphericalangle FCA.$$

Комбинацијом претходних једначина добијамо:

$$\frac{\sin \xi}{\sin \eta} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \gamma}.$$

Као што је речено, количник $\dfrac{\sin \xi}{\sin \eta}$ је исти за све тачке на висини CF, а на сличан начин се може показати да је за све тачке на висини AD овај количник једнак $\dfrac{\cos \beta \cos \alpha}{\cos \gamma \cos \alpha}$.

Нека је тачка H пресек висина AD и CF. Докажимо да и трећа висина пролази кроз H. Нека је HE нормала из тачке H на страницу AC (слика 5.3).



Слика 5.3

Тада важи:

$$\frac{\sin HD}{\sin HE} = \frac{\cos \beta \cos \gamma}{\cos \alpha \cos \gamma} \qquad \text{и} \qquad \frac{\sin HF}{\sin HE} = \frac{\cos \beta \cos \alpha}{\cos \gamma \cos \alpha}.$$

Дељењем ових једначина добијамо да је

$$\frac{\sin HD}{\sin HF} = \frac{\cos\gamma\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta},$$

што значи да се тачка H налази и на висини BE. Овим смо показали да је ортоцентар сферног троугла одређен следећом релацијом:

$$\boxed{\frac{\sin HD}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{\sin HE}{\cos\alpha\cos\gamma} = \frac{\sin HF}{\cos\alpha\cos\beta}}.$$

На сличан начин можемо да покажемо да се тежишне дужи сферног троугла секу у једној тачки (тежишту). Нека је CC_1 тежишна дуж сферног троугла ABC и нека су ω и ε нормале из тачке C_1 на странице BC и AC. На основу леме 5.1 је $\dfrac{\sin\omega}{\sin\varepsilon} = \dfrac{\sin\sphericalangle C_1CB}{\sin\sphericalangle C_1CA}$. Користећи синусну теорему добијамо:

$$\frac{\sin\sphericalangle C_1CB}{\sin C_1B} = \frac{\sin\beta}{\sin CC_1} \qquad \text{и} \qquad \frac{\sin\sphericalangle C_1CA}{\sin C_1A} = \frac{\sin\alpha}{\sin CC_1}.$$

Пошто је $C_1A = C_1B$, дељењем добијамо:

$$\frac{\sin\sphericalangle C_1CB}{\sin\sphericalangle C_1CB} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \Rightarrow \frac{\sin\omega}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}.$$

На основу поменуте леме је количник $\dfrac{\sin\omega}{\sin\varepsilon}$ исти за све тачке на тежишној дужи CC_1, а на сличан начин се може показати да је за било коју тачке на тежишној дужи AA_1 овај количник једнак $\dfrac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$.

Нека је тачка T пресек тежишних дужи AA_1 и CC_1. Докажимо да и трећа тежишна дуж пролази кроз T. Нека су x, y и z нормале из тачке T на странице a, b и c сферног троугла ABC респективно. Тада важи:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma} \qquad \text{и} \qquad \frac{\sin z}{\sin y} = \frac{\sin\beta\sin\alpha}{\sin\gamma\sin\alpha}.$$

Дељењем ових једначина добијамо да је

$$\frac{\sin x}{\sin z} = \frac{\sin\gamma\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$

што значи да се тачка T налази и на тежишној дужи BB_1. Овим смо показали да је тежиште сферног троугла одређено следећом релацијом:

$$\boxed{\frac{\sin x}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{\sin y}{\sin\alpha\sin\gamma} = \frac{\sin z}{\sin\alpha\sin\beta}}.$$

6 Површина и екцес сферног троугла

Дефиниција 6.1. ***Месец*** *на сфери је пресек два велика круга лопте.* ***Угао*** *месеца је угао између равни великих кругова сфере који формирају месец.*

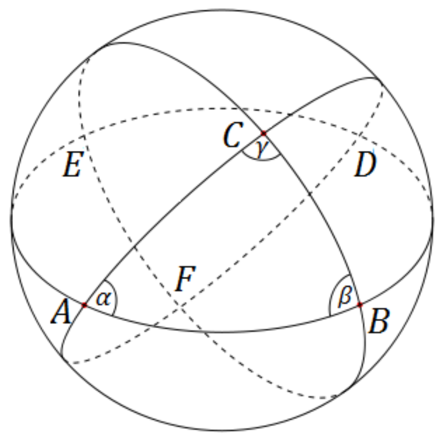
Површину месеца чији је угао ϕ можемо израчунати на следећи начин:

$$\frac{P_\phi}{P_{\text{сфере}}} = \frac{\phi}{2\pi} \Rightarrow P_\phi = 4R^2\pi \cdot \frac{\phi}{2\pi} \Rightarrow \boxed{P_\phi = 2R^2\phi}.$$

Теорема 6.1. *(Жирар[5]) Површина сферног троугла на сфери полупречника R је*

$$\boxed{S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)}$$

Доказ. Уочимо сферне месеце $ABDC$, $ABCE$ и $AFBC$ (слика 6.1) са угловима α, β и γ.



Слика 6.1

Сферни троугао AFB је централносиметричан сферном троуглу CED. То значи да збир површина ова три месеца представља површину полусфере увећане за двоструку површину сферног троугла ABC. Дакле,

$$P_\alpha + P_\beta + P_\gamma = \frac{1}{2}P_{\text{сфере}} + 2S,$$

$$2R^2(\alpha + \beta + \gamma) = 2R^2\pi + 2S_{ABC} \Rightarrow S = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi).$$

∎

Површина је увек већа од нуле, па важи:

Последица. *Збир углова сферног троугла је већи ог π.*

Дефиниција 6.2. *Израз $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ се назива* ***екцесом*** *сферног троугла ABC.*

[5]Albert Girard (1595 - 1632), француски математичар

Став 6.1. *За сваки сферни троугао важи*

$$a+b+c<2\pi \text{ и } \alpha+\beta+\gamma<3\pi.$$

Доказ. Ако странице сферног троугла изразимо преко углова њему поларног сферног троугла, добијамо:

$$\pi-\alpha_1+\pi-\beta_1+\pi-\gamma_1<2\pi \Rightarrow \alpha_1+\beta_1+\gamma_1>\pi,$$

што је тачно на основу последице претходне теореме. С друге стране, ако углове сферног троугла изразимо преко углова њему поларног сферног троугла, добијамо:

$$\pi-a_1+\pi-b_1+\pi-c_1<3\pi \Rightarrow a_1+b_1+c_1>0,$$

што је очигледно тачно. ∎

Став 6.2. *Екцес сферног троугла је адитиван: ако је D произвољна тачка странице BC произвољног сферног троугла ABC, тада је* $\boxed{\varepsilon_{ABC}=\varepsilon_{ABD}+\varepsilon_{ACD}}$.

Доказ.

$$\varepsilon_{ABD}+\varepsilon_{ACD}=\sphericalangle DAB+\beta+\sphericalangle BDA-\pi+\sphericalangle CAD+\sphericalangle ADC+\gamma-\pi=$$

$$(\sphericalangle DAB+\sphericalangle CAD)+\beta+\gamma+(\sphericalangle BDA+\sphericalangle ADC)-2\pi=\alpha+\beta+\gamma+\pi-2\pi=\alpha+\beta+\gamma-\pi=\varepsilon_{ABC}.$$

∎

Став 6.3. *Површина сферног многоугла са n страница и збиром углова θ може се рачунати преко формуле* $\boxed{S(n,\theta)=R^2(\theta-(n-2)\pi)}$.

Доказ. Повлачењем дијагонала из једног темена сферног многоугла добијамо $n-2$ сферних троуглова. Обележимо збир углова i-тог троугла са θ_i. Очигледно је збир тих θ_i једнак θ, па сумирањем површина тих троуглова добијамо:

$$S(n,\theta)=\sum_{i=1}^{n-2}R^2\varepsilon_i=R^2\left(\sum_{i=1}^{n-2}\theta_i-(n-2)\pi\right)\Rightarrow S(n,\theta)=R^2(\theta-(n-2)\pi).$$

∎

Став 6.4. *Нека је ε екцес сферног троугла ABC и s његов полуобим. Тада важи:*
а) (Кањолијева[6] теорема)

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}},$$

б) (Лулијерова[7] теорема)

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}},$$

в) $\displaystyle\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\operatorname{tg}r\sin\frac{s}{2}}{2\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}$, *г)* $\displaystyle\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin\gamma}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos\gamma}$.

[6]Antonio Cagnoli (1743 - 1816), италијански математичар, астроном и дипломата
[7]Simon Antoine Jean L'Huilier (1750 - 1840), швајцарски математичар

Доказ. а)

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{2}=\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi-\gamma}{2}\right)$$

$$=\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\left(\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}-\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\right)$$

$$=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\left(\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{a+b}{2}\right)\qquad\text{(следи из Деламбрових аналогија)}$$

$$=\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{\sin a\sin b}$$

$$=\frac{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{4\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\frac{b}{2}}=\frac{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.$$

б)

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}}{\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{4}}=\frac{2\sin\frac{\alpha+\beta-(\pi-\gamma)}{4}\cos\frac{\alpha+\beta+\pi-\gamma}{4}}{2\cos\frac{\alpha+\beta-(\pi-\gamma)}{4}\cos\frac{\alpha+\beta+\pi-\gamma}{4}}=$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\sin\frac{\pi-\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\pi-\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}=\frac{\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}-1}{\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}+1}\cdot\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}=$$

$$\frac{\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}-1}{\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}+1}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}-\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}+\cos\frac{c}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin(s-b)}}=$$

$$\frac{\sin\frac{b+c-a}{2}\sin\frac{a+c-b}{2}}{\cos\frac{a+b+c}{2}\cos\frac{a+b-c}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\sin\frac{s}{2}\cos\frac{s}{2}\sin\frac{s-c}{2}\cos\frac{s-c}{2}}{\sin\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-a}{2}\sin\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-b}{2}}}=$$

$$\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}.$$

в) Користећи Лулијерову теорему добијамо:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}=\frac{\sin\frac{s}{2}\sqrt{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\sqrt{\sin s}\cdot\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}r\sin\frac{s}{2}}{2\cos\frac{s-a}{2}\cos\frac{s-b}{2}\cos\frac{s-c}{2}}\qquad\text{(према формули за } \operatorname{tg}r \text{ из претходне главе).}$$

г)

$$\cos\frac{\varepsilon}{2}=\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma-\pi}{2}=\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi-\gamma}{2}\right)$$

$$=\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$=\frac{\cos\frac{a+b}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}+\cos\frac{a-b}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\qquad\text{(следи из Деламбрових аналогија)}$$

$$=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\left(\cos^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\left(\cos^2\frac{\gamma}{2}-\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\frac{c}{2}}$$

$$\Rightarrow\cos\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\gamma}{\cos\frac{c}{2}}.\tag{1}$$

У делу а) овог решења је показано да важи:

$$\sin\frac{\varepsilon}{2}=\frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}=\frac{\sin\gamma\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.\tag{2}$$

Комбинацијом (1) и (2) добијамо:

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\sin\gamma\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}}{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos\gamma}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{a}{2}\sin\gamma}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{b}{2}\cos\gamma}.$$

■

7 Примене сферне тригонометрије

7.1 Примена у стереометрији

Многи задаци из стереометрије у којима се тражи запремина неког тела или дужина неког елемента се могу решити коришћењем елемената и формула сферне тригонометрије. То су задаци у којима су познати елементи непогодни за решавање помоћу стандардних метода и формула из стереометрије, па се зато служимо сферном тригонометријом.

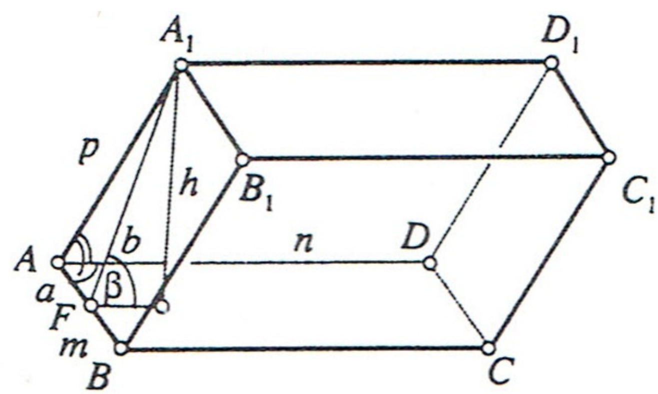
Пример 7.1. *Показати да је запремина паралелепипеда* $ABCDA_1B_1C_1D_1$

$$\boxed{V = 2mnp\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}},$$

где су m, n *и* p *дужине ивица паралелепипеда које полазе из темена* A; a, b *и* c *су углови које оне образују и* $2s = a + b + c$.

Решење. Површина основе паралелепипеда је $B = mn \sin a$. Из правоуглих троуглова A_1EF и A_1FA (слика 7.1) за висину $H = A_1E$ се добија $H = p \sin c \sin \beta$, где је β диедар триедра $ABDA_1$ уз ивицу AB. Дакле,

$$V = BH = mnp \sin a \sin \beta = 2mnp \sin a \sin c \sin \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}.$$



Слика 7.1

Тражена формула се добија када се у добијени израз уврсте формуле за половину угла:

$$\sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-c)}{\sin a \sin c}} \qquad \text{и} \qquad \cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin s \sin(s-b)}{\sin a \sin c}}.$$

▲

Пример 7.2. *Одредити дужину дијагонале паралелепипеда* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *у зависности од дужина његових ивица и углова које оне граде.*

Решење. Нека је $AB = a$, $AD = b$, и $AA_1 = c$, и нека је $\measuredangle A_1AD = \alpha$, $\measuredangle A_1AB = \beta$ и $\measuredangle BAD = \gamma$. Нека је $AC_1 = d$ тражена дијагонала; тада је:

$$d^2 = AC^2 + CC_1^2 - 2AC \cdot CC_1 \cos \measuredangle ACC_1 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \gamma + 2cAC \cos \measuredangle A_1AC.$$

Докажимо сада следећу лему:

Лема 7.1. *Нека је D произвољна тачка на страници BC сферног троугла ABC. Тада је:*

$$\cos AD \sin BC = \cos AB \sin CD + \cos BC \sin BD.$$

Доказ. Применом косинусне теореме за странице на сферни троугао ABD добијамо:

$$\cos AD = \cos AB \cos BD + \sin AB \sin BD \cos \beta.$$

Применом косинусне теореме за странице на сферни троугао ABC добијамо:

$$\cos \beta = \frac{\cos AC - \cos AB \cos BC}{\sin AB \sin BC}.$$

Убацивањем друге једначине у прву добија се:

$$\cos AD = \cos AB \cos BD + \frac{\sin BD}{\sin BC}(\cos AC - \cos AB \cos BC)$$

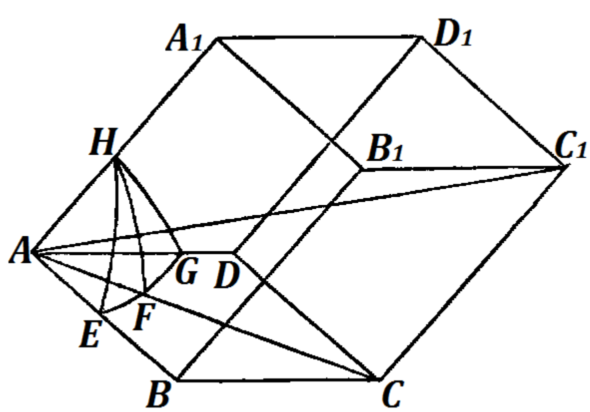
$$\Rightarrow \cos AD \sin BC = \cos AB \cos BD \sin BC + \cos AC \sin BD - \cos AB \cos BC \sin BD,$$

$$\cos AD \sin BC = \cos AB(\cos BD \sin BC + \cos BC \sin BD) + \cos AC \sin BD,$$

$$\cos AD \sin BC = \cos AB \sin(BC - BD) + \cos AC \sin BD = \cos AB \sin CD + \cos BC \sin BD.$$

■

Опишимо сферу око тачке A. Нека она сече дужи AB, AC, AD и AA_1 у тачкама E, F, G и H (слика 7.2). На основу претходне леме важи:



Слика 7.2

$$\cos \measuredangle A_1AC = \cos HF = \frac{\cos HE \sin FG + \cos HG \sin EF}{\sin EG} = \frac{\cos \beta \sin \measuredangle CAD + \cos \alpha \sin \measuredangle BAC}{\sin \gamma}.$$

Према томе је $d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + \dfrac{2cAC}{\sin\gamma}(\cos\beta \sin\measuredangle CAD + \cos\alpha \sin\measuredangle BAC)$. На основу синусне теореме у равни важи

$$AC \sin \measuredangle CAB = a \sin \gamma \qquad \text{и} \qquad AC \sin \measuredangle CAD = b \sin \gamma,$$

па имамо да је $\boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\gamma + 2ac\cos\beta + 2bc\cos\alpha}}$. ▲

7.2 Примена у геодезији

На Земљиној сфери (чији је полупречник $R = 6370$ km) положај тачке се одређује њеним географским координатама: **географском ширином** $\varphi_M(-90° \leq \varphi_M \leq 90°)$ и **географском дужином** $\lambda_M(-180° \leq \lambda_M \leq 180°)$. Северна ширина и западна дужина су позитивне, а јужна ширина и источна дужина су негативне.

Азимут правца на Земљиној сфери (на пример правца лета авиона) је угао који образују правац југ-север и дати правац, рачунат од севера у смеру казаљке на сату.

Пример 7.3. *Авион лети најкраћим путем из Београда ($\varphi_1 = 44°48'$, $\lambda_1 = 20°29'$) у Сан Франциско ($\varphi_2 = 37°42'$, $\lambda_2 = -122°25'$).*
а) Колики пут авион прелази?
б) Какав је азимут правц лета авиона при поласку, а какав при доласку?
в) У којој тачки свог пута је авион најближи Северном полу? Колико је тада удаљен од Северног пола?

Решење. У троуглу ABC (A - Београд, B - Сан Франциско, C - Северни пол, слика 7.3) важи:

$$a = 90° - \varphi_2 = 62°11', \quad b = 90° - \varphi_1 = 45°12', \quad \gamma = \lambda_1 - \lambda_2 = 142°54'.$$

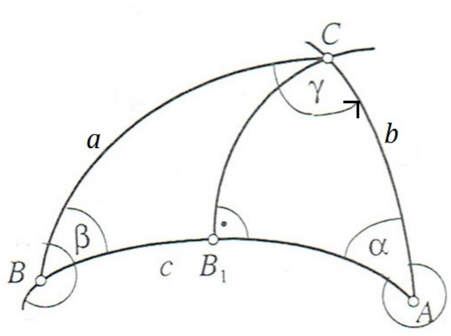
Решавањем тог троугла добијамо:

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos\gamma = -0,17173, \quad c = 1,74338 \text{ rad} \quad = 99°53',$$

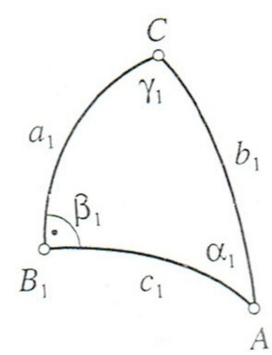
$$\cos\alpha = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c} = 0,84067, \quad \alpha = 32°47',$$

$$\cos\beta = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = 0,90068, \quad \beta = 25°45'.$$

а) Авион прелети пут дужине $d = R \cdot c$ (rad) $= 6370 \cdot 1,74338 = 11105$ km .
б) Правац лета има у поласку азимут $360° - \alpha = 327°13'$, а при доласку $180° + \beta = 205°45'$.



Слика 7.3



Слика 7.4

в) Нека је B_1 тачка у којој је авион најближи Северном полу (слика 7.4). У троуглу AB_1C познато је: $b_1 = b = 45°12'$, $\alpha_1 = \alpha = 32°47'$, $\beta_1 = 90°$. Решавањем тог троугла добија се:

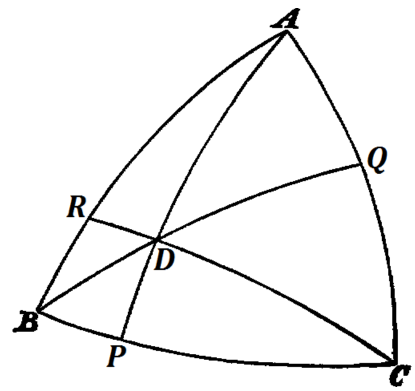
$$\sin a_1 = \sin\alpha_1 \sin b_1 = 0,38427 \Rightarrow a_1 = 0,39441 \text{ rad} = 22°36',$$

$$\cos\gamma_1 = \frac{\cos c_1 - \cos a_1 \cos b_1}{\sin a_1 \sin b_1} = \frac{\dfrac{\cos b_1}{\cos a_1} - \cos a_1 \cos b_1}{\sin a_1 \sin b_1} = \operatorname{tg} a_1 \operatorname{tg} b_1 = 0,4133 \Rightarrow \gamma = 65°35'.$$

Тачка B_1 има географске координате $\varphi_{B_1} = 90° - a_1 = 67°24'$, $\lambda_{B_1} = \lambda_1 - \gamma_1 = -45°6'$, а њена удаљеност од Северног пола је $d = 6370 \cdot 0,39441 = 2512$ km . ▲

7.3 Разни примери

Пример 7.4. *На страницама сферног троугла ABC се налазе тачке P, Q и R, при чему се дужи AP, BQ и CR секу у једној тачки (слика 7.5). Тада је* $\dfrac{\sin AR \sin BP \sin CQ}{\sin RB \sin PC \sin QA} = 1$.



Слика 7.5

Решење. Применом синусне теореме на сферне троуглове BPD и CPD добијамо

$$\frac{\sin BP}{\sin BD} = \frac{\sin \sphericalangle BDP}{\sin \sphericalangle BPD} \qquad \text{и} \qquad \frac{\sin PC}{\sin CD} = \frac{\sin \sphericalangle CDP}{\sin \sphericalangle CPD}.$$

Дељењем ових једначина се добија

$$\frac{\sin BP}{\sin PC} = \frac{\sin \sphericalangle BDP \sin \sphericalangle CPD \sin BD}{\sin \sphericalangle CDP \sin \sphericalangle BPD \sin CD} = \frac{\sin \sphericalangle BDP \sin BD}{\sin \sphericalangle CDP \sin CD}.$$

На сличан начин се може показати да је

$$\frac{\sin AR}{\sin RB} = \frac{\sin \sphericalangle ADR \sin AD}{\sin \sphericalangle BDR \sin BD} \qquad \text{и} \qquad \frac{\sin CQ}{\sin QA} = \frac{\sin \sphericalangle CDQ \sin CD}{\sin \sphericalangle ADQ \sin AQ}.$$

Множењем ових једначина добија се $\dfrac{\sin AR \sin BP \sin CQ}{\sin RB \sin PC \sin QA} = 1$. ▲

Пример 7.5. *Нека су све странице сферног троугла ABC једнаке $\dfrac{\pi}{2}$ и нека је T тачка у унутрашњости тог сферног троугла. Тада важи*

$$\cos^2 TA + \cos^2 TB + \cos^2 TC = 1.$$

Решење. На основу косинусне теореме за странице је

$$\cos AB = \cos AC \cos BC + \sin AC \sin BC \cos \sphericalangle ACB \Rightarrow \cos \sphericalangle ACB = 0 \Rightarrow \sphericalangle ACB = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогно су и остали углови сферног троугла ABC једнаки $\dfrac{\pi}{2}$. Применом косинусне теореме за странице на сферне троуглове TAB и TCB добијамо

$$\cos TA = \cos AC \cos TC + \sin AC \sin TC \cos \sphericalangle TCA = \sin TC \cos \sphericalangle TCA,$$

$$\cos TB = \cos BC \cos TC + \sin BC \sin TC \cos \sphericalangle TCB = \sin TC \sin \sphericalangle TCA.$$

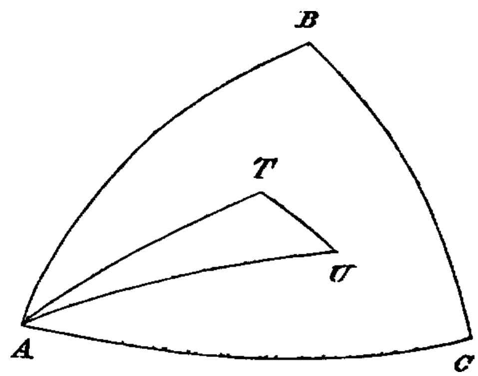
Квадрирањем и сабирањем ових једначина добијамо

$$\cos^2 TA + \cos^2 TB = \sin^2 TC = 1 - \cos^2 TC \Rightarrow \cos^2 TA + \cos^2 TB + \cos^2 TC = 1.$$

▲

Пример 7.6. *Нека су све странице сферног троугла ABC једнаке $\dfrac{\pi}{2}$ и нека су T и U тачке у унутрашњости тог сферног троугла. Тада важи*

$$\cos TU = \cos TA \cos UA + \cos TB \cos UB + \cos TC \cos UC.$$



Слика 7.6

Решење. Применом косинусне теореме за странице добијамо

$$\cos TU = \cos TA \cos UA + \sin TA \sin UA \cos \sphericalangle TAU.$$

Применом формуле за косинус разлике је

$$\begin{aligned}\cos TAU &= \cos(\sphericalangle BAU - \sphericalangle BAT)\\ &= \cos \sphericalangle BAU \cos \sphericalangle BAT - \sin \sphericalangle BAU \sin \sphericalangle BAT\\ &= \cos \sphericalangle BAU \cos \sphericalangle BAT - \cos \sphericalangle CAU \cos \sphericalangle CAT\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \cos TU = \cos TA \cos UA + \sin TA \sin UA(\cos \sphericalangle BAU \cos \sphericalangle BAT - \cos \sphericalangle CAU \cos \sphericalangle CAT).$$

Из косинусне теореме за странице такође добијамо јеначине

$$\cos TB = \sin TA \cos \sphericalangle BAT, \qquad \cos UB = \sin UA \cos \sphericalangle BAU,$$

$$\cos TC = \sin TA \cos \sphericalangle CAT \quad \text{и} \quad \cos UC = \sin UA \cos \sphericalangle CAU,$$

па претходна једначина постаје

$$\cos TU = \cos TA \cos UA + \cos TB \cos UB + \cos TC \cos UC.$$

▲

Закључак

Пре свега желим да се захвалим свом ментору на свом времену и стрпљењу које је издвојио приликом читања мог матурског рада. Надам се да је овај рад био разумљив и да ће бити користан у средњошколској настави. У њему наравно нису обрађени сви делови књиге Исака Тодхантера, па топло препоручујем свима које је овај рад заинтересовао да прочитају целу књигу и употпуне стечено знање из сферне тигонометрије.

Литература

[1] I. Todhunter, *Spherical trigonometry*, Cambridge, 1886.

[2] Ђорђе Дугошија, Живорад Ивановић, *Тригонометрија*, Круг, Београд, 2006.

[3] Стеван Давидовић, *Геометрија за више разреде, 3. део - Тригонометрија*, Београд, 1921.

[4] Срђан Огњановић, Живорад Ивановић, *Стереометрија*, Круг, Београд, 2009.

[5] *www.overleaf.com*

[6] *www.wikipedia.org*